On the Robustness of Some Multivariate Test Procedures (統計的多変量解析の研究報告集 II)

伊藤, 孝一

数理解析研究所講究録
60巻 1968年 57-76

On the Robustness of Some Multivariate Test Procedures

南山大 経済　伊藤孝一

§1. 序

k個のp変量母集団の確率ベクトル

$$\underset{\sim}{x}_t' = [\, x_{1t} \;\; x_{2t} \;\; \cdots \;\; x_{pt} \,], \quad t=1,2,\cdots,k \qquad (1.1)$$

の分布法則はそのモーメントによって特徴付けられ，特に，1次，2次，3次，4次のモーメントはそれぞれ次のごとく与えられているものとする。

$$E(\underset{\sim}{x}_t) = \underset{\sim}{\mu}_t \qquad (1.2)$$

$$E(\underset{\sim}{x}_t - \underset{\sim}{\mu}_t)(\underset{\sim}{x}_t - \underset{\sim}{\mu}_t)' = \underset{\sim}{\Sigma}_t \qquad (1.3)$$

$$E(x_{it} - \mu_{it})(x_{jt} - \mu_{jt})(x_{lt} - \mu_{lt}) = \kappa^{(t)}_{ijl} \qquad (1.4)$$

$$E(x_{it} - \mu_{it})(x_{jt} - \mu_{jt})(x_{lt} - \mu_{lt})(x_{mt} - \mu_{mt})$$
$$= \kappa^{(t)}_{ijlm} + \sigma^{(t)}_{ij}\sigma^{(t)}_{lm} + \sigma^{(t)}_{il}\sigma^{(t)}_{jm} + \sigma^{(t)}_{im}\sigma^{(t)}_{jl} \qquad (1.5)$$

ここに，x_{it}，μ_{it}はそれぞれ$\underset{\sim}{x}_t$，$\underset{\sim}{\mu}_t$の第i要素を表わし，$\underset{\sim}{\Sigma}_t = (\sigma^{(t)}_{ij})$は$p \times p$の正の定符号対称行列として，その要素はすべて有限，また，$\kappa^{(t)}_{ijl}$，$\kappa^{(t)}_{ijlm}$，$i,j,l,m=1,$

2, …, p, は $\boldsymbol{x}_t$ のそれぞれ3次, 4次のキュムラントを表わし, すべて有限と仮定する。この k 個の母集団から抽出された大きさ N_t, $t=1, 2, \cdots, k$, の無作為標本は N 個の互に独立な確率ベクトル

$$\boldsymbol{x}'_{t\alpha} = [x_{1t\alpha}\ \ x_{2t\alpha}\ \ \cdots\ \ x_{pt\alpha}],$$

$$t=1, 2, \cdots, k; \quad \alpha = 1, 2, \cdots, N_t \qquad (1.6)$$

によって表わされる。ここに, $N=\sum_{t=1}^{k} N_t$, また, (i) $\boldsymbol{x}_{t\alpha}$ と $\boldsymbol{x}_{s\beta}$ は $t \neq s$ 或は $\alpha \neq \beta$ のとき互に独立であり, (ii) t を一定にするとき, $\boldsymbol{x}_{t\alpha}$, $\alpha=1, 2, \cdots, N_t$, は互に独立に同一の分布に従い, その1〜4次のモーメントは(1.2)〜(1.5)によって与えられる。

この k 個の p 変量母集団の平均ベクトルに関する帰無仮説

$$H_{01}: \quad \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \cdots = \boldsymbol{\mu}_k \qquad (1.7)$$

を対立仮説

H_1 : (1.7)の等式の少くとも一つが成立しない

に対して検定するために, 母集団の分布が正規分布であって, かつ分散共分散行列が等しいという仮定の下に得られる Hotelling の T_0^2 検定の大きさ α の棄却域は

$$\{T_0^2 : \quad T_0^2 > T_{0\alpha}^2(p, k-1, N-k)\} \qquad (1.8)$$

である(Hotelling [3])。ここに, $\bar{\boldsymbol{x}}_t = \sum_{\alpha=1}^{N_t} \boldsymbol{x}_{t\alpha}/N_t$, $\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{t=1}^{k} r_t \bar{\boldsymbol{x}}_t$, $r_t = N_t/N$, $\boldsymbol{S}_t = \sum_{\alpha=1}^{N_t} (\boldsymbol{x}_{t\alpha}-\bar{\boldsymbol{x}}_t)(\boldsymbol{x}_{t\alpha}-\bar{\boldsymbol{x}}_t)'$

$/n_t$, $n_t = N_t - 1$, $Q_B = \sum_{t=1}^{k} N_t(\bar{x}_t - \bar{x})(\bar{x}_t - \bar{x})'$, $S_0 = \sum_{t=1}^{k} n_t S_t/(N-k)$ とすると,

$$T_0^2 = \mathrm{tr}\, Q_B S_0^{-1} \tag{1.9}$$

であり, $T_{0\alpha}^2(p, k-1, N-k)$ は統計量 T_0^2 の H_{01} の下における標本分布の上方 100α % 点を表わす。また, 母集団に関する上と同じ仮定の下に得られる Wilks の尤度比検定の大きさ α の棄却域は

$$\{ W : W < W(\alpha) \} \tag{1.10}$$

である (Wilks [8])。ここに,

$$W = |(N-k)S_0| \,/\, |Q_B + (N-k)S_0| \tag{1.11}$$

であり, $W(\alpha)$ は統計量 W の H_{01} の下における標本分布の下方 100α% 点を表わす。さらに, 母集団の分布の正規性の仮定の下に得られる James の T_r^2 検定の大きさ α の棄却域は

$$\{ T_r^2(k) : T_r^2(k) > T_{r\alpha}^2(k) \} \tag{1.12}$$

である (James [6])。ここに, $W_t = (S_t/N_t)^{-1}$, $W = \sum_{t=1}^{k} W_t$, $\hat{x} = W^{-1}\sum_{t=1}^{k} W_t \bar{x}_t$ とすると,

$$T_r^2(k) = \sum_{t=1}^{k} (\bar{x}_t - \hat{x})' W_t (\bar{x}_t - \hat{x}) \tag{1.13}$$

であり, また, $T_{r\alpha}^2(k)$ は統計量 $T_r^2(k)$ の H_{01} の下における標本分布の上方 100α% 点を表わす。

次に, $k=1$ の場合, 母集団の分散共分散行列に関する帰

無假説

H_{02}: $\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{\Sigma}_0$（但し，$\underset{\sim}{\Sigma}_0$ は与えられた $p\times p$ の正の定符号対称行列とする） (1.14)

H_{03}: $\underset{\sim}{\Sigma} = \sigma^2 \underset{\sim}{I}(p)$（但し，$\underset{\sim}{I}(p)$ は $p\times p$ の単位行列，σ^2 は未知のスカラー） (1.15)

H_{04}: $\underset{\sim}{\Sigma}_{gh} = \underset{\sim}{0}$ （$g, h = 1, 2, \cdots, q$） (1.16)

但し

$$\underset{\sim}{\Sigma}(p\times p) = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \cdots & \underset{\sim}{\Sigma}_{1q} \\ & \vdots & \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{q1} & \cdots & \underset{\sim}{\Sigma}_{qq} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{array} \\ \begin{array}{ccc} p_1 & \cdots & p_q \end{array} & \end{array}$$

を検定するために，それぞれの場合について，母集団の分布が正規分布と仮定されるとき得られる尤度比検定を考察する（Anderson [1]）。以下，$k=1$ の場合には，添字 k を省略する。(1.14) に対する尤度比検定の大きさ α の棄却域は

$$\{\lambda_2 : \lambda_2 < \lambda_2(\alpha)\} \tag{1.17}$$

である。ここに，$\underset{\sim}{V} = n\underset{\sim}{S}/N$ として，

$$\lambda_2 = |\underset{\sim}{V}\underset{\sim}{\Sigma}_0^{-1}|^{\frac{1}{2}N} \exp\left\{\frac{N}{2}\,\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{I}(p) - \underset{\sim}{V}\underset{\sim}{\Sigma}_0^{-1}\right)\right\} \tag{1.18}$$

であって，$\lambda_2(\alpha)$ は統計量 λ_2 の H_{02} の下における標本分布の下方 $100\alpha\%$ 点を表わす。(1.15) に対する尤度比検定の大きさ α の棄却域は

$$\{\lambda_3 : \lambda_3 < \lambda_3(\alpha)\} \qquad (1.19)$$

である。ここに、

$$\lambda_3 = |\underset{\sim}{V}|^{\frac{N}{2}} \Big/ (\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{V}/p)^{\frac{1}{2}pN} \qquad (1.20)$$

であって、$\lambda_3(\alpha)$ は統計量 λ_3 の H_{03} の下における標本分布の下方 100α% 点を表わす。また、(1.16) に対する尤度比検定の大きさ α の棄却域は

$$\{\lambda_4 : \lambda_4 < \lambda_4(\alpha)\} \qquad (1.21)$$

ここに、

$$\lambda_4 = |\underset{\sim}{V}|^{\frac{N}{2}} \Big/ \prod_{g=1}^{q} |\underset{\sim}{V}_{gg}|^{\frac{N}{2}} \qquad (1.22)$$

ただし、

$$\underset{\sim}{V}(p\times p) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} \underset{\sim}{V}_{11} & \cdots & \underset{\sim}{V}_{1q} \\ & \vdots & \\ \underset{\sim}{V}_{q1} & \cdots & \underset{\sim}{V}_{qq} \end{array}\right] & \begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{array} \\ \begin{array}{ccc} p_1 & \cdots & p_q \end{array} & \end{array}$$

また、$\lambda_4(\alpha)$ は統計量 λ_4 の H_{04} の下における標本分布の下方 100α% 点である。

k 個の母集団の場合、帰無仮説

$$H_{05} : \underset{\sim}{\Sigma}_1 = \underset{\sim}{\Sigma}_2 = \cdots = \underset{\sim}{\Sigma}_k \qquad (1.23)$$

を検定するための、正規分布の仮定の下に導かれる尤度比検定による大きさ α の棄却域は

$$\{\lambda_5 : \lambda_5 < \lambda_5(\alpha)\} \qquad (1.24)$$

である。ここに、$\underset{\sim}{V}_t = n_t \hat{\Sigma}_t / N_t$, $\underset{\sim}{V} = \sum_{t=1}^{k} (\nu_t \underset{\sim}{V}_t)$ とするとき、

$$\lambda_5 = \prod_{t=1}^{k} |\underset{\sim}{V}_t|^{\frac{N_t}{2}} \Big/ |\underset{\sim}{V}|^{\frac{N}{2}} \qquad (1.25)$$

また、$\lambda_5(\alpha)$ は統計量 λ_5 の H_{05} の下における標本分布の下方 $100\alpha\%$ 点を表わす。

以上述べた平均ベクトル或は分散共分散行列に関する種々の仮説検定のための標準の仮定の下に得られる検定法が、若し分散共分散行列の仮定が成立しないとき、或は正規分布の仮定が成立しないとき、如何なる影響をうけるかについて、主として大標本の立場から次節以下において考察することにする。

§2. 多変量の Behrens-Fisher 問題

$k=2$ として、2つの母集団の分布を $N(\mu_1, \underset{\sim}{\Sigma}_1)$, $N(\mu_2, \underset{\sim}{\Sigma}_2)$ と仮定するとき、$\underset{\sim}{\Sigma}_1 = \theta \underset{\sim}{\Sigma}_2$（但し、$\theta$ は既知のスカラー）と仮定しないで、(1.7) の H_{01} を検定する問題は多変量の Behrens-Fisher 問題である。これに対しては次のような正確な検定法を求めることができる。

いま、$N_1 \leq N_2$ と仮定して、$p \times N$ の行列

$$\underset{\sim}{Y}(p\times N) = \underset{\sim}{X}_1(p\times N_1)\cdot \underset{\sim}{A}(N_1\times N) - \underset{\sim}{X}_2(p\times N_2)\cdot \underset{\sim}{B}(N_2\times N) \qquad (2.1)$$

を考える。ここに、$\underset{\sim}{X}_1 = [\underset{\sim}{x}_{11} \cdots \underset{\sim}{x}_{1N_1}]$, $\underset{\sim}{X}_2 = [\underset{\sim}{x}_{21}, \cdots$

x_{2N_2}] であり, A, B は常数を要素とするそれぞれ $N_1 \times N$, $N_2 \times N$ の行列であって, その要素と N の値は母数とは独立に, 条件

$$E(y_\gamma) = \nu = \mu_1 - \mu_2 \qquad (2.2)$$

$$E(y_\gamma - \nu)(y_\varepsilon - \nu)' = \delta_{\gamma\varepsilon} \Sigma \qquad (2.3)$$

によって決定されるものとする。但し, y_γ は Y の第 γ 列, $\gamma = 1, 2, \cdots, N$, $\delta_{\gamma\varepsilon}$ はクロネッカーのデルタ, Σ は $p \times p$ の正の定符号対称行列である。このとき, H_{01} は

$$H_{01}^*: \quad \nu = 0 \qquad (2.4)$$

と同等であって, $\bar{y} = \sum_{\gamma=1}^{N} y_\gamma / N$, $S = \sum_{\gamma=1}^{N} (y_\gamma - \bar{y})(y_\gamma - \bar{y})'/n$, $n = N-1$, とおけば, H_{01}^* を検定するための大きさ α の棄却域は

$$\{ T_s^2 : T_s^2 > T_\alpha^2(n) \} \qquad (2.5)$$

によって与えられる。ここに,

$$T_s^2 = N \bar{y}' S^{-1} \bar{y} \qquad (2.6)$$

であって, H_{01}^* の下において統計量 T_s^2 は自由度 n の一般化された Student T^2 分布に従うから, $T_\alpha^2(n)$ はその上方 $100\alpha\%$ 点である。さて, 条件 (2.2), (2.3) は条件

$$A' e(N_1) = e(N), \quad B' e(N_2) = e(N) \qquad (2.7)$$

$$A'A = c_1 I(N), \quad B'B = c_2 I(N) \qquad (2.8)$$

$$\Sigma = c_1 \Sigma_1 + c_2 \Sigma_2 \qquad (2.9)$$

と同等であることが証明できる。ここに、$\underset{\sim}{e}(L)$ はその要素がすべて 1 である $L\times 1$ の列ベクトル、$\underset{\sim}{I}(L)$ は $L\times L$ の単位行列であって、c_1, c_2 は常数。従って、(2.7), (2.8) を満足する $N_1\times N$, $N_2\times N$ の行列 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ について、

$$N \le N_1 \le N_2 \tag{2.10}$$

$$c_1 \ge N/N_1, \quad c_2 \ge N/N_2 \tag{2.11}$$

が成立しなければならない。かくして、(2.10), (2.11) を満足する N, c_1, c_2 の値を与えることによって、(2.7), (2.8) の解として、$\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ が求められ、これを用いて1つの検定法 (2.5) が得られる。このような検定のすべての集合を D とするとき、棄却域 (2.5) の検出力関数は N の単調増加関数、c_1, c_2 の単調減少関数であることが証明できるから、D の中での最強力検定は

$$N = N_1 \le N_2 \tag{2.12}$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = N_1/N_2 \tag{2.13}$$

を満足するものである。この場合の (2.7), (2.8) の解の一つは、$\underset{\sim}{A} = (a_{\alpha\gamma})$, $\underset{\sim}{B} = (b_{\beta\gamma})$ とするとき、

$$a_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}, \quad \alpha, \gamma = 1, 2, \cdots, N_1,$$

$$b_{\beta\gamma} = \begin{cases} \delta_{\beta\gamma}(N_1/N_2)^{\frac{1}{2}} - (1/(N_1N_2)^{\frac{1}{2}}) + (1/N_2), & \beta \le N_1, \\ \dfrac{1}{N_2}, & N_1 < \beta \le N_2, \quad \gamma = 1, 2, \cdots, N_1 \end{cases} \tag{2.14}$$

によって与えられる。

以上の方法は，一変量の場合の Scheffé の方法 (Scheffé [7]) を拡張したものであって，特別解 (2.14) は Bennett [2] によって与えられた。そして，この検定問題においても $\Sigma_1 = \theta \Sigma_2$ と仮定できるならば，棄却域 (1.8) を用いることができ，この場合統計量 T_0^2 は自由度 (N_1+N_2-2) の一般化された Student T^2 分布に従う。上に求めた D の中の最強の棄却域 (2.5) をこの場合に用いれば，その検出力は当然低いのであるが，N_1 と N_2 が殆んど等しいときには，検出力の低下が割合少いことが数値計算によって確められた (Ito [4])。

次に，多変量の Behrens-Fisher 問題において，(1.8) および (1.12) より得られる大きさ α の棄却域

$$\{ T_u^2(2) : \quad T_u^2(2) > \chi_\alpha^2(p) \} \qquad (2.15)$$

$$\{ T_r^2(2) : \quad T_r^2(2) > \chi_\alpha^2(p) \} \qquad (2.16)$$

を用いて H_0 を検定することを考察しよう。ここに，統計量 $T_u^2(2)$, $T_r^2(2)$ はそれぞれ $k=2$ の場合の T_0^2, $T_r^2(k)$ に等しく，$\chi_\alpha^2(p)$ は自由度 p の χ^2 分布の上方 $100\alpha\%$ 点である。この場合，H_1 の下における統計量 $T_r^2(2)$ の非心分布について次のような漸近展開が得られる (Ito [4])。

$$\Pr\{ T_r^2(2) \leq 2\theta \mid H_1 \} = G_p(\theta \mid \lambda)$$

$$- \sum_{t=1}^{2} \frac{1}{n_t} \Big[\frac{1}{4} \{ [t|t] + [t]^2 \} (E+1)$$

$$+ \frac{1}{4} [t|t] (E-1) + \frac{1}{2} \phi_{1t} (E-1) E + \phi_{2t} E^2$$

$$+ \frac{1}{4} \phi_{3t} (E-1) E^2 \Big] (1-E) G_\rho(\theta|\lambda)$$

$$+ O(n_t^{-2}), \tag{2.17}$$

ここに，$\chi_\alpha^2(p) = 2\theta$，$\rho = p/2$，$\underset{\sim}{\nu} = \underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2$，$\underset{\sim}{V} = \frac{\underset{\sim}{\Sigma}_1}{N_1} + \frac{\underset{\sim}{\Sigma}_2}{N_2}$，
$\lambda = \underset{\sim}{\nu}' \underset{\sim}{V}^{-1} \underset{\sim}{\nu}$，$G_\rho(\theta|\lambda) = e^{-\frac{1}{2}\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{2^i i!} G_{\rho+i}(\theta)$，
$G_\alpha(\theta) = [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^\theta t^{\alpha-1} e^{-t} dt$，$G_\alpha(\theta|0) = G_\alpha(\theta)$，
$E^a G_\rho(\theta|\lambda) = G_{\rho+a}(\theta|\lambda)$，$a = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，であ
，

$$[t] = \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{V}^{-1} (\underset{\sim}{\Sigma}_t / N_t),$$

$$[t|t] = \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{V}^{-1} (\underset{\sim}{\Sigma}_t / N_t) \underset{\sim}{V}^{-1} (\underset{\sim}{\Sigma}_t / N_t),$$

$$\phi_{1t} = \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{\nu} \underset{\sim}{\nu}' \underset{\sim}{V}^{-1} (\underset{\sim}{\Sigma}_t / N_t) \underset{\sim}{V}^{-1} (\underset{\sim}{\Sigma}_t / N_t) \underset{\sim}{V}^{-1},$$

$$\phi_{2t} = \frac{1}{2} \{ \phi_{1t} + \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{V}^{-1} (\underset{\sim}{\Sigma}_t / N_t) \cdot \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{\nu} \underset{\sim}{\nu}' \underset{\sim}{V}^{-1} (\underset{\sim}{\Sigma}_t / N_t) \underset{\sim}{V}^{-1} \},$$

$$\phi_{3t} = \mathrm{tr}\, \{ \underset{\sim}{\nu} \underset{\sim}{\nu}' \underset{\sim}{V}^{-1} (\underset{\sim}{\Sigma}_t / N_t) \underset{\sim}{V}^{-1} \}^2$$

(2.17) は H_{01} の下において，

$$P_r \{ T_r^2(2) \leq 2\theta | H_{01} \} = G_\rho(\theta)$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{t=1}^{2} \frac{1}{n_t} \{ 2 [t|t] E + [t]^2 (E+1) \} (1-E) G_\rho(\theta)$$

$$+ O(n_t^{-2}), \tag{2.18}$$

となる。他方，検定量 $T_u^2(2)$ の標本分布については，n_t が一定の下に $N_t \to \infty$ のとき，次の近似式が成立つことが証明

がある (Ito + Schull [5])。すなわち、

$$\Pr\{T_a^2(2) \le 2\theta \mid H_1\} \doteqdot \Pr\{\chi^2(f) \le 2\theta/c \mid H_1\} \quad (2.19)$$

ここに、$\chi^2(f)$ は自由度 f の χ^2 分布に従う統計量、c, f は次の連立方程式の解である。

$$cf = \mathrm{tr}\sum_{t=1}^{2}\{(1-r_t)\Sigma_t\dot{\Sigma}^{-1} + N_t\mu_*^{(t)}\mu_*^{(t)'}\dot{\Sigma}^{-1}\}$$

$$c^2f = \mathrm{tr}\Big\{\sum_{t=1}^{2}(1-2r_t)(\Sigma_t\dot{\Sigma}^{-1})^2 + I(p) + 2\sum_{t=1}^{2}N_t\mu_*^{(t)}\mu_*^{(t)'}\dot{\Sigma}^{-1}\Sigma_t\dot{\Sigma}^{-1}\Big\} \quad (2.20)$$

但し、$\mu_t = \mu_* + \mu_*^{(t)}$, $\sum_{t=1}^{2}N_t\mu_*^{(t)} = 0$, $\dot{\Sigma} = \sum_{t=1}^{2}(r_t\Sigma_t)$.

(2.18), (2.19) 式を用いて棄却域 (2.15), (2.16) の真の大きさの近似値を求めることができる。$\alpha = 0.05$ として、$p = 1, 2, 3, 4$; $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$, $\{N_1, N_2\}$ の種々の組合せに対する数値計算の結果によれば、大きな N_1, N_2 に対して次の結論が得られた。すなわち、$r = N_1/N_2$, $\Sigma_1\Sigma_2^{-1}$ の固有根を θ とするとき、r の一定値に対して、T_v^2 検定の真の大きさは名目的大きさ 0.05 より常に大きくなる。これに対して、T_a^2 検定は $\theta < 1$ のとき真の大きさは名目的大きさより大となり、$\theta > 1$ のとき逆となる。しかし、T_v^2 検定のうける影響は T_a^2 検定に比して遥かに少ない。以上の結果は一般の k の場合に拡張できる (Ito [4])。

§3　k個の母集団の場合

母集団分布の正規性，等分散共分散行列を仮定しないで，H_{01}を検定するために，名目的大きさαの次の3つの棄却域を考察しよう。すなわち，

$$\hat{T}_u^2\text{検定}\quad \{\hat{T}_u^2(k):\ \hat{T}_u^2(k) > \chi_\alpha^2(p(k-1))\} \tag{3.1}$$

$$\hat{T}_v^2\text{検定}\quad \{\hat{T}_v^2(k):\ \hat{T}_v^2(k) > \chi_\alpha^2(p(k-1))\} \tag{3.2}$$

$$\hat{T}_w^2\text{検定}\quad \{\hat{T}_w^2(k):\ \hat{T}_w^2(k) > \chi_\alpha^2(p(k-1))\} \tag{3.3}$$

ここに，統計量$\hat{T}_u^2(k)$は(1.9)のT_0^2に等しく，$\hat{T}_v^2(k)$は(1.13)の$T_V^2(k)$に等しい。また，$\hat{T}_w^2(k)$は(1.11)のΨを用いて，$\hat{T}_w^2(k) = -(N-k)\log\Psi$と表わされ，$\chi_\alpha^2(p(k-1))$は自由度$p(k-1)$の$\chi^2$分布の上方$100\alpha$%点である。

ν_tを一定にして$N_t\to\infty$とするとき，$\hat{T}_w^2(k)$は$\hat{\chi}_w^2(k)$に確率収束する。ここに，$\dot{\Sigma} = \sum_{t=1}^{k}(\nu_t\Sigma_t)$とするとき，

$$\hat{\chi}_w^2(k) = -(N-k)\log|(N-k)\dot{\Sigma}|/|Q_B+(N-k)\dot{\Sigma}|$$

$$= (N-k)\log|I(p)+\frac{1}{N-k}Q_B\dot{\Sigma}^{-1}|$$

$$= \mathrm{tr}\,Q_B\dot{\Sigma}^{-1} - \frac{1}{2(N-k)}\mathrm{tr}(Q_B\dot{\Sigma}^{-1})^2 + O(N^{-2}) \tag{3.4}$$

他方，$\hat{T}_u^2(k)$は$\mathrm{tr}\,Q_B\dot{\Sigma}^{-1}$に確率収束するから，大きな$N_t$に対して，$\hat{T}_u^2$検定と$\hat{T}_w^2$検定は同等である。

次に，統計量$\hat{T}_u^2(k)$の標本分布は，ν_tが一定のとき大きなNに対して次のように近似できる。すなわち，

$$P_r\{\hat{T}_u^2(k) > x \mid H_1\} \doteqdot P_r\{\chi^2(f) > \frac{x}{c}\} \qquad (3.5)$$

ここに、c, f は次の連立方程式の解である。

$$cf = \mathrm{tr}\sum_{t=1}^{k}\{(1-r_t)\boldsymbol{\Sigma}_t\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + N_t\boldsymbol{\mu}_*^{(t)}\boldsymbol{\mu}_*^{(t)'}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\}$$

$$2c^2f = 2\,\mathrm{tr}\{\sum_{t=1}^{k}(1-2r_t)(\boldsymbol{\Sigma}_t\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1})^2 + \Sigma(p) + 2\sum_{t=1}^{k}N_t\boldsymbol{\mu}_*^{(t)}\boldsymbol{\mu}_*^{(t)'}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_t\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\}$$
$$+4\sum_{t=1}^{k}(1-r_t)\sum_{i,j,l=1}^{p}\kappa_{ijl}^{(t)}(\boldsymbol{\mu}_*^{(t)'}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1})_i(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1})_{jl}$$
$$+\sum_{t=1}^{k}\frac{(1-r_t)^2}{N_t}\sum_{i,j,l,m=1}^{p}\kappa_{ijlm}^{(t)}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1})_{ij}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1})_{lm} \qquad (3.6)$$

但し、$\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}_* + \boldsymbol{\mu}_*^{(t)}$, $\sum_{t=1}^{k}N_t\boldsymbol{\mu}_*^{(t)} = \boldsymbol{0}$, また、$(\boldsymbol{\mu}_*^{(t)'}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1})_i$ はベクトル $\boldsymbol{\mu}_*^{(t)'}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}$ の第 i 要素、$(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1})_{ij}$ は $p\times p$ の行列 $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}$ の (i,j) 要素を表わす。(3.6) において、$k=2$, $\kappa_{ijl}^{(t)}=0$, $\kappa_{ijlm}^{(t)}=0$ とすれば、方程式 (2.20) が得られる。

同様、統計量 $\hat{T}_r^2(k)$ の標本分布も、r_t を一定にし N を大にするとき、次のように近似することができる。すなわち、

$$P_r\{\hat{T}_r^2(k) > z \mid H_1\} \doteqdot P_r\{\chi^2(f') > \frac{z}{c'}\} \qquad (3.7)$$

ここに、c', f' は次の連立方程式の解である。

$$c'f' = p(k-1) + \mathrm{tr}\sum_{t=1}^{k}N_t\boldsymbol{\mu}^{(t)}\boldsymbol{\mu}^{(t)'}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}$$

$$2c'^2f' = 2p(k-1) + 4\,\mathrm{tr}\sum_{t=1}^{k}N_t\boldsymbol{\mu}^{(t)}\boldsymbol{\mu}^{(t)'}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1} \qquad (3.8)$$
$$+4\sum_{t=1}^{k}\sum_{i,j,l=1}^{p}\kappa_{ijl}^{(t)}(\boldsymbol{\mu}^{(t)'}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1})_i(\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}-N_t\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1})_{jl}$$
$$+\sum_{t=1}^{k}\frac{1}{N_t}\sum_{i,j,l,m=1}^{p}\kappa_{ijlm}^{(t)}(\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}-N_t\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1})_{ij}(\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}-N_t\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1})_{lm}$$

但し、$\mu_t = \mu + \mu^{(t)}$, $\sum_{t=1}^{k} \Lambda_t \mu^{(t)} = 0$, $\Lambda_t = (\Sigma_t / N_t)^{-1}$,
$\Lambda = \sum_{t=1}^{k} \Lambda_t$.

これらの結果を用いれば、大きいNに対して、等分散共分散行列の仮定が成立しない場合、$\hat{C}_1^2$検定の方が$\hat{C}_2^2$検定より大きい影響をうけ、また、母集団分布の正規性の仮定の成立しない場合の影響は両者ともほぼ等しいことが分る。更に、3次のキュムラントの存在は両検定の大きさには影響しないが、検出力にはNが大きいときにも影響をもっている（Ito [4]）。

§4. 分散共分散行列に関する仮説検定

(1) H_{02}: $\Sigma = \Sigma_0$ の場合

適当な変数変換によってこの帰無仮説は H_{02}^*: $\Sigma = I(p)$ と同等であって、母集団分布の正規性を仮定したときの尤度比(1.18)は

$$\lambda_2^* = |V|^{\frac{N}{2}} \exp\left\{\frac{N}{2}\, tr\,(I(p) - V)\right\} \qquad (4.1)$$

となる。いま、

$$f_2(V) \equiv \lambda_2^{*\,\frac{2}{N}} \qquad (4.2)$$

とおいて、母集団分布の正規性を仮定しない場合のこの統計量の標本分布を考察しよう。$N \to \infty$のとき、H_{02}^*の下において、統計量$N(1 - f_2(V))$は漸近的に正規分布に従う確率変数のある二次形式の分布に等しくなるが、これは3次のキ

キュムラントに依存しないが、4次のキュムラントには依存している。しかして、もしすべての4次のキュムラント κ_{ijlm} が0であれば、$N(1-f_2(V))$ の漸近分布は自由度 $\frac{1}{2}p(p+1)$ の χ^2 分布に等しいことが証明できる。また、H_{02}^* が真でないとき、$N\to\infty$ ならば統計量 $\sqrt{N}\{f_2(V)-f_2(\Sigma)\}$ は漸近的に $N(0,\sigma_2^2)$ に従う。ここに、

$$\sigma_2^2=\{f_2(\Sigma)\}^2\{2\,\mathrm{tr}\,(I(p)-\Sigma)^2+\sum_{i,j,l,m=1}^{p}\kappa_{ijlm}$$

$$\times(\Sigma^{-1}-I(p))_{ij}(\Sigma^{-1}-I(p))_{lm}\} \quad (4.3)$$

したがって、λ_2 検定の真の大きさおよび検出力は $N\to\infty$ のとき、母集団分布の3次のキュムラントの影響はうけないが、4次のキュムラントの影響をうける（Ito [4]）。

(2) H_{03}: $\Sigma=\sigma^2 I(p)$ の場合

この場合 (1.20) の統計量 λ_3 を用いて、

$$f_3(V)\equiv\lambda_3^{\frac{2}{N}}=|V|^{\frac{1}{p}}/(\mathrm{tr}\,V/p) \quad (4.4)$$

とおけば、統計量 $pN(1-f_3(V))$ は $N\to\infty$ のとき、H_{03} が真であって、かつ母集団分布の4次のキュムラントがすべて0であるならば、漸近的に自由度 $\frac{1}{2}(p+2)(p-1)$ の χ^2 分布に従い、また、H_{03} が真でないときは、統計量 $\sqrt{N}\{f_3(V)-f_3(\Sigma)\}$ が漸近的に $N(0,\sigma_3^2)$ に従う。ここに、

$$\sigma_3^2=\{f_3(\Sigma)\}^2[2\{\mathrm{tr}\,\Sigma^2/(\mathrm{tr}\,\Sigma)^2-\frac{1}{p}\}$$

$$+\sum_{j,k,l,m=1}^{p} \kappa_{jklm} \left(\Sigma^{-1}/p - I(p)/\mathrm{tr}\,\Sigma\right)_{jk} \left(\Sigma^{-1}/p - I(p)/\mathrm{tr}\,\Sigma\right)_{lm} \Big] \qquad (4.5)$$

従って、(1)の場合と同様、λ_3検定の真の大きさおよび検出力はN→∞のとき、母集団分布における3次のキュムラントの存在の影響をうけないが、4次のキュムラントの存在の影響をうける（Ito [4]）。

(3) H_{04} : $\Sigma_{gh} = 0 \ (g, h = 1, 2, \cdots, q)$ の場合

正規母集団の仮定の下に得られる尤度比検定統計量(1.22)のλ_4を用いて、

$$f_4(V) = \lambda_4^{\frac{2}{N}} = |V|/|V_1| \qquad (4.6)$$

とおく。ここに、$|V_1| = \prod_{g=1}^{q} |V_{gg}|$。このとき、統計量 $N(1-f_4(V))$ は $N\to\infty$ のとき、H_{04}の下においては母集団の正規性が仮定されなくとも、漸近的に自由度 $\sum_{g<h} p_g p_h$ の χ^2 分布に従うことが証明される。他方、H_{04}が真でないときには、統計量 $\sqrt{N}\{f_4(V) - f_4(\Sigma)\}$ は漸近的に $N(0, \sigma_4^2)$ に従う。ここに、

$$\sigma_4^2 = \{f_4(\Sigma)\}^2 \Big\{ 2\,\mathrm{tr}\,(I(p) - \Sigma\Sigma_1^{-1})^2 + \sum_{j,k,l,m=1}^{p} \kappa_{jklm} (\Sigma^{-1} - \Sigma_1^{-1})_{jk} (\Sigma^{-1} - \Sigma_1^{-1})_{lm} \Big\} \qquad (4.7)$$

但し、

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \cdots 0 \\ & \vdots \\ 0 & 0 \cdots \Sigma_{qq} \end{bmatrix}$$

従って、母集団の正規性を仮定しないときには、λ_4検定を用

いるならば，その真の大きさは $N \to \infty$ のとき名目の大きさに等しくなるが，検出力は4次のキュムラントの影響をうける（Ito [4]）。

(4) H_{05} : $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \cdots = \Sigma_k$ の場合

k 個の母集団がすべて正規分布に従うという仮定の下に導かれた尤度比検定統計量 (1.25) の λ_5 を用いて，

$$f_5(V_1, V_2, \cdots, V_k) \equiv \lambda_5^{\frac{2}{N}} = \prod_{t=1}^{k} |V_t|^{r_t} \Big/ \Big|\sum_{t=1}^{k} r_t V_t\Big| \quad (4.8)$$

とおく。このとき，H_{05} が真であって，かつ母集団分布の4次のキュムラントがすべて0であるならば，統計量 $N(1-f_5(V_1, \cdots, V_k))$ は $N \to \infty$ のとき漸近的に自由度 $\frac{1}{2}p(p+1)(k-1)$ の χ^2 分布に従い，また，H_{05} が真でないときには，統計量 $\sqrt{N}\{f_5(V_1, \cdots, V_k) - f_5(\Sigma_1, \cdots, \Sigma_k)\}$ は $N \to \infty$ のとき漸近的に $N(0, \sigma_5^2)$ に従う。ここに，

$$\sigma_5^2 = \{f_5(\Sigma_1, \cdots, \Sigma_k)\}^2 \sum_{t=1}^{k} r_t \Big\{ 2\,\mathrm{tr}\,(I(p) - \Sigma_t \dot{\Sigma}^{-1})^2 + \sum_{i,j,l,m=1}^{p} \kappa_{ijlm}^{(t)} (\Sigma_t^{-1} - \dot{\Sigma}^{-1})_{ij} (\Sigma_t^{-1} - \dot{\Sigma}^{-1})_{lm} \Big\} \quad (4.9)$$

従って，(1)，(2) の場合と同様，母集団の正規性が仮定されないときの λ_5 検定の真の大きさおよび検出力は $N \to \infty$ のとき，4次のキュムラントの影響をうける（Ito [4]）。

参考文献

1. Anderson, T. W. (1958). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley, New York.

2. Bennett, B. M. (1951). Note on a solution of the generalized Behrens-Fisher problem. Ann. Inst. Statist. Math. 2, 87-90.

3. Hotelling, H. (1950). A generalized T-test and measure of multivariate dispersion. Proc. Second Berkeley Sym. Math. Statist. Prob. 23-41.

4. Ito, K. (1968). On the effect of heteroscedasticity and non-normality upon some multivariate test procedures. To appear in Proc. Second International Symposium on Multivariate Analysis, Academic Press, New York.

5. Ito, K. and Schull, W. J. (1964). On the robustness of the T_0^2 test in multivariate analysis of variance when variance-covariance matrices are not equal. Biometrika 51, 71-82.

6. James, G. S. (1954). Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are

unknown. Biometrika. 41, 19-43.

7. Scheffé, H. (1943). On solutions of the Behrens-Fisher problem based on the t-distribution. Ann. Math. Statist. 14, 35-44.

8. Wilks, S. S. (1932). Certain generalizations in the analysis of variance. Biometrika. 24, 471-494.